

ØKINTRO

Blok 2 – 2021/2022

Navn: Magnus Goltermann

Hold/instruktor: Hold 8

Obligatorisk Opgave nr.: ³ _____

Jeg erklærer hermed, at jeg selv har udarbejdet denne besvarelse

<u>5/1/2022</u>	<u>Magnus Goltermann</u>
Dato	Navn

Forbeholdt instruktør:

	Bestået	Ikke-bestået
Første aflevering		
Gen-aflevering		

Københavns Universitet
Morten Olsen

Opgave 1

1.1

Produktionsfunktionen er givet i opgaven til

$$y = x_1^\alpha x_2^{1-\alpha}$$

Udgifterne ved produktionen kan opstilles som

$$C = x_1\omega_1 + x_2\omega_2$$

Herefter kan input efterspørgselsfunktionerne for x_1 og x_2 bestemmes ved brug af Lagrange med: $\min_{x_1, x_2} x_1\omega_1 + x_2\omega_2$ s.t. $y = x_1^\alpha x_2^{1-\alpha}$:

$$L = x_1\omega_1 + x_2\omega_2 - \lambda(x_1^\alpha x_2^{1-\alpha} - y)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = \omega_1 - \lambda a x_1^{a-1} x_2^{1-a} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = \omega_2 - \lambda x_1^a (1-a) x_2^{-a} = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{\frac{\partial L}{\partial x_1}}{\frac{\partial L}{\partial x_2}} &= \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{a x_1^{a-1} x_2^{1-a}}{(1-a) x_1^a x_2^{-a}} = \frac{a}{(1-a)} \frac{x_1^{a-1} x_2^{1-a}}{x_1^a x_2^{-a}} = \\ &= \frac{a}{(1-a)} x_1^{a-1} x_1^{-a} x_2^{1-a} x_2^a = \frac{a}{(1-a)} x_1^{-1} x_2 = \frac{a}{(1-a)} \frac{x_2}{x_1} \iff \\ x_2 &= \frac{\omega_1(1-a)x_1}{\omega_2 a} \iff x_1 = \frac{a\omega_2 x_2}{\omega_1(1-a)} \end{aligned}$$

Indsætter $\frac{\omega_1(1-a)x_1}{\omega_2 a}$ for x_2 og isolerer for x_1 for at bestemme x_1^* :

$$\begin{aligned} y &= x_1^\alpha x_2^{1-\alpha} = x_1^\alpha \left(\frac{\omega_1(1-a)x_1}{\omega_2 a} \right)^{1-\alpha} \iff y = x_1^\alpha \frac{\omega_1^{1-\alpha} (1-a)^{1-\alpha} x_1^{1-\alpha}}{\omega_2^{1-\alpha} a^{1-\alpha}} \iff \\ y &= x_1 \left(\frac{\omega_1}{\omega_2} \right)^{1-\alpha} \left(\frac{1-a}{a} \right)^{1-\alpha} \iff x_1 = \frac{y}{\left(\frac{\omega_1}{\omega_2} \right)^{1-\alpha} \left(\frac{1-a}{a} \right)^{1-\alpha}} = \\ &= \frac{y \left(\frac{\omega_1}{\omega_2} \right)^{a-1} \left(\frac{1-a}{a} \right)^{a-1}}{1} \end{aligned}$$

Gør det samme for x_2 , hvor $\frac{a\omega_2 x_2}{\omega_1(1-a)}$ indsættes for x_1 :

$$\begin{aligned} y &= x_1^\alpha x_2^{1-\alpha} = \left(\frac{a\omega_2 x_2}{\omega_1(1-a)} \right)^\alpha x_2^{1-\alpha} = x_2^{1-\alpha} \frac{a^\alpha \omega_2^\alpha x_2^\alpha}{\omega_1^\alpha (1-a)^\alpha} = x_2 \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} \right)^\alpha \left(\frac{a}{1-a} \right)^\alpha \iff \\ x_2 &= \frac{y}{\left(\frac{\omega_2}{\omega_1} \right)^\alpha \left(\frac{a}{1-a} \right)^\alpha} \iff x_2 = y \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} \right)^{-a} \left(\frac{a}{1-a} \right)^{-a} \end{aligned}$$

Dvs. virksomhedens input efterspørgselsfunktioner er

$$\begin{aligned} x_1^* &= y \left(\frac{\omega_1}{\omega_2} \right)^{a-1} \left(\frac{1-a}{a} \right)^{a-1} \\ x_2^* &= y \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} \right)^{-a} \left(\frac{a}{1-a} \right)^{-a} \end{aligned}$$

1.2

Starter med at sætte $\frac{x_2^*}{x_1^*}$:

$$\frac{x_2^*}{x_1^*} = \frac{y(\frac{\omega_2}{\omega_1})^{-a}(\frac{a}{1-a})^{-a}}{y(\frac{\omega_1}{\omega_2})^{a-1}(\frac{1-a}{a})^{a-1}} = (\frac{\omega_2}{\omega_1})^{-a}(\frac{a}{1-a})^{-a}(\frac{\omega_1}{\omega_2})^{1-a}(\frac{1-a}{a})^{1-a} =$$

$$\frac{\omega_1^{1-a}}{\omega_2^{1-a}} \cdot \frac{(1-a)^{1-a}}{a^{1-a}} = \frac{\omega_1}{\omega_2} \cdot \frac{1-a}{a} = (\frac{\omega_2}{\omega_1})^{-1} \cdot \frac{1-a}{a}$$

Herefter kan $\frac{\partial(\frac{x_2^*}{x_1^*})}{\partial(\frac{\omega_2}{\omega_1})}$ bestemmes:

$$\frac{\partial(\frac{x_2^*}{x_1^*})}{\partial(\frac{\omega_2}{\omega_1})} = -1(\frac{\omega_2}{\omega_1})^{-2} \frac{1-a}{a}$$

Elasticiteten af $\frac{x_2^*}{x_1^*}$ ift. $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ kan bestemmes ved:

$$\frac{\partial(\frac{x_2^*}{x_1^*})}{\partial(\frac{\omega_2}{\omega_1})} \frac{\frac{\omega_2}{\omega_1}}{\frac{x_2^*}{x_1^*}} = -(\frac{\omega_2}{\omega_1})^{-2} \frac{1-a}{a} \frac{\frac{\omega_2}{\omega_1}}{\frac{x_2^*}{x_1^*}} = -(\frac{\omega_2}{\omega_1})^{-2} \frac{1-a}{a} \frac{\frac{\omega_2}{\omega_1}}{\frac{\omega_1}{\omega_2} \frac{1-a}{a}} = -(\frac{\omega_2}{\omega_1})^{-2} \frac{1-a}{a} \frac{\omega_2^2}{\omega_1^2} \frac{1}{1-a} =$$

$$-(\frac{\omega_2}{\omega_1})^{-2+2} \frac{\frac{1-a}{a}}{\frac{1-a}{a}} = -1$$

Dvs. elasticiteten af $\frac{x_2^*}{x_1^*}$ ift. $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ er -1.

1.3

Først kan andelen af totalomkostningerne som bruges på input 1 (O_1) bestemmes ved at dividere omkostningerne for input 1 med totalomkostningerne:

$$O_1 = \frac{\omega_1 x_1}{\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2} = \frac{1}{1 + \frac{\omega_2 x_2}{\omega_1 x_1}}$$

Fra tidligere vides det at

$$\frac{x_2}{x_1} = (\frac{\omega_2}{\omega_1})^{-1} \cdot \frac{1-a}{a}$$

som kan indsættes i O_1 :

$$\frac{1}{1 + \frac{\omega_2 x_2}{\omega_1 x_1}} = \frac{1}{1 + \frac{\omega_2}{\omega_1} (\frac{\omega_2}{\omega_1})^{-1} \cdot \frac{1-a}{a}} = \frac{1}{1 + \frac{1-a}{a}} = \frac{1}{\frac{a}{a} + \frac{1-a}{a}} =$$

$$\frac{1}{\frac{1}{a}} = \alpha$$

Det ses, at ved en priselastisitet på -1 vil input 1's elasticitet kun afhænge af α . Altså ligemeget hvad prisen er, vil der stadig bruges samme andel penge på input 1.

1.4

Det vides at omkostningerne bestemmes ved

$$C = \omega_1 x_1 + \omega_2 x_2$$

Herefter kan vi blot indsætte x_1^* x_2^* , som fundet i opgave 1.1 for henholdsvis x_1 og x_2 for at bestemme omkostningsfunktionen:

$$C(y, \omega_1, \omega_2) = \omega_1 \left(y \left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^{a-1} \left(\frac{1-a}{a}\right)^{a-1}\right) + \omega_2 \left(y \left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^{-a} \left(\frac{a}{1-a}\right)^{-a}\right)$$

1.5

For at vurdere virksomhedens marginalomkostninger ift. til y , differentieres $C(y, \omega_1, \omega_2)$ ift. y :

$$\frac{\partial C}{\partial y} = \omega_1 \left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^{a-1} \left(\frac{1-a}{a}\right)^{a-1} + \omega_2 \left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^{-a} \left(\frac{a}{1-a}\right)^{-a}$$

Da dette udtryk ikke afhænger af y , er marginalomkostningerne konstante når kun y ændres.

Opgave 2

Omkostningsfunktionen

$$C(y) = F + \frac{\alpha}{1+\alpha} y^{\frac{1+\alpha}{\alpha}}$$

Og efterspørgselsfunktionen

$$D(p) = \frac{A}{p^\epsilon}$$

2.1

Udbudsfunktionen må være lig de marginaleomkostninger MC , som bestemmes ved at differentiere $C(y)$ ift. y :

$$MC = \frac{\partial C}{\partial y} = \frac{\alpha}{1+\alpha} \frac{1+\alpha}{\alpha} y^{\frac{1+\alpha}{\alpha}-1} = y^{\frac{1}{\alpha}}$$

Det vides også at $MC = p$, hvorefter y kan isoleres:

$$MC = p \iff y^{\frac{1}{\alpha}} = p \iff (y^{\frac{1}{\alpha}})^\alpha = p^\alpha \iff y = p^\alpha$$

Udbudsfunktionen af den enkelte virksomhed er $y(p) = p^\alpha$

2.2

Den enkelte virksomheds udbudselasticitet:

$$\frac{\partial y}{\partial p} \frac{p}{y} = \alpha p^{\alpha-1} \frac{p}{y} = \alpha \frac{p^\alpha}{p} \frac{p}{y} = \alpha \frac{p^\alpha}{y} = \alpha \frac{p^\alpha}{p^\alpha} = \alpha$$

Udbudselasticiteten er α . Hvilket vil sige, at når $\alpha \rightarrow \infty$, så bevæger udbudselasticiteten også mod uendeligt, og omvendt når $\alpha \rightarrow 0$, går udbudselasticiteten mod 0. Ift. omkostningsfunktionen ses det, at de faste omkostninger ikke er af betydning for udbudselasticiteten.

2.3

Det vides, at der er n virksomheder, og derfor må industriens samlede udbud være summen af alle virksomheders udbud:

$$Y = p_i^\alpha + p_{i+1}^\alpha + \dots + p_n^\alpha = n \cdot p^\alpha$$

2.4

Ligevægten i markedet er skæringen mellem efterspørgselsfunktionen $D(p) = \frac{A}{p^\epsilon}$ og det samlede udbud $Y = n \cdot p^\alpha$. Ligevægtsprisen kan derfor findes ved at sætte $D(p) = Y$ og isolere for p :

$$\frac{A}{p^\epsilon} = n \cdot p^\alpha \iff \frac{A}{n} = p^{\alpha+\epsilon} \iff (p^{\alpha+\epsilon})^{\frac{1}{\alpha+\epsilon}} = \left(\frac{A}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha+\epsilon}} \iff p = \left(\frac{A}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha+\epsilon}}$$

Ligevægtesprisen i markedet er $p^* = \left(\frac{A}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha+\epsilon}}$

2.5

Elasticiteten af ligevægtsprisen:

$$\frac{\partial p^*}{\partial A} \frac{A}{p^*} = \frac{1}{A(\alpha+\epsilon)} \left(\frac{A}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha+\epsilon}} \frac{A}{p^*} = \frac{\left(\frac{A}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha+\epsilon}}}{(\alpha+\epsilon)p^*} = \frac{\left(\frac{A}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha+\epsilon}}}{(\alpha+\epsilon)\left(\frac{A}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha+\epsilon}}} = \frac{1}{\alpha+\epsilon}$$

Dvs. elasticiteten af ligevægtsprisen er $\frac{1}{\alpha+\epsilon}$.

2.6

Når $\alpha \rightarrow \infty$ går elasticiteten af ligevægtsprisen mod 0, da α er i tælleren. Og når $\alpha \rightarrow 0$, går elasticiteten af ligevægtsprisen mod $\frac{1}{\epsilon}$. Dvs. ligevægtsprisen afhænger af α såvel som ϵ . Dette giver også god mening, da udbudselasticiteten kun afhang af α .

2.7

Det vides, at ligevægtsprisen på langt sigt skal være mindst lig med omkostningerne for virksomheden, da de ellers vil forlade markedet, og hvis den er større end omkostningerne, vil der komme nye virksomheder til markedet. Det vides derfor at

$$p = MC(y)$$

Som også skal være lig de gennemsnitlige omkostninger $\frac{C(y)}{y}$:

$$p = MC(y) = \frac{C(y)}{y}$$

Fra 2.1 vides det at $MC = y^{\frac{1}{\alpha}}$ og fra opgaven at $C(y) = F + \frac{\alpha}{1+\alpha}y^{\frac{1+\alpha}{\alpha}}$:

$$y^{\frac{1}{\alpha}} = \frac{F + \frac{\alpha}{1+\alpha}y^{\frac{1+\alpha}{\alpha}}}{y}$$

Herefter kan y isoleres for at bestemme markedets udbud ved ligevægtsprisen på langt sigt:

$$\begin{aligned} y^{\frac{1}{\alpha}} &= \frac{F + \frac{\alpha}{1+\alpha}y^{\frac{1+\alpha}{\alpha}}}{y} \iff y^{\frac{1}{\alpha}} = \frac{F}{y} + \frac{\alpha}{1+\alpha}y^{\frac{1+\alpha}{\alpha}}\frac{1}{y} = \frac{F}{y} + \frac{\alpha}{1+\alpha}y^{\frac{1}{\alpha}}y^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}\frac{1}{y} = \\ &= \frac{F}{y} + \frac{\alpha}{1+\alpha}y^{\frac{1}{\alpha}} \iff y^{\frac{1}{\alpha}+1} = F + \frac{\alpha}{1+\alpha}y^{\frac{1}{\alpha}+1} \iff 0 = F + \frac{\alpha}{1+\alpha}y^{\frac{1}{\alpha}+1} - y^{\frac{1}{\alpha}+1} = \\ &= F + y^{\frac{1}{\alpha}+1}\left(\frac{\alpha}{1+\alpha} - 1\right) \iff y^{\frac{1}{\alpha}+1} = \frac{-F}{\frac{\alpha}{1+\alpha} - 1} = \frac{F}{\frac{1}{1+\alpha}} = F(1+\alpha) \iff \\ &= y^{\frac{1+\alpha}{\alpha}} = F(1+\alpha) \iff (y^{\frac{1+\alpha}{\alpha}})^{\frac{\alpha}{1+\alpha}} = (F(1+\alpha))^{\frac{\alpha}{1+\alpha}} \iff \\ &= y^* = (F(1+\alpha))^{\frac{\alpha}{1+\alpha}} \end{aligned}$$

Da markedets udbud ved ligevægtsprisen er fundet, kan det herefter sætte det ind for y i

$$p = \frac{C(y)}{y}$$

for at bestemme p^* :

$$p^* = \frac{F + \frac{\alpha}{1+\alpha}((F(1+\alpha))^{\frac{\alpha}{1+\alpha}})^{\frac{1+\alpha}{\alpha}}}{(F(1+\alpha))^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}}$$

Hvilket kan reduceres:

$$\begin{aligned} p^* &= \frac{F + \frac{\alpha}{1+\alpha}((F(1+\alpha))^{\frac{\alpha}{1+\alpha}})^{\frac{1+\alpha}{\alpha}}}{(F(1+\alpha))^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}} = \frac{F + \frac{\alpha}{1+\alpha}F(1+\alpha)}{F^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}(1+\alpha)^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}} = \\ &= \frac{F(1 + \frac{\alpha}{1+\alpha}(1+\alpha))}{F^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}(1+\alpha)^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}} = \frac{F^{1-\frac{\alpha}{1+\alpha}}(1+\alpha)}{(1+\alpha)^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}} = F^{\frac{1}{1+\alpha}}(1+\alpha)^{1-\frac{\alpha}{1+\alpha}} \iff \\ &= p^* = F^{\frac{1}{1+\alpha}}(1+\alpha)^{\frac{1}{1+\alpha}} \end{aligned}$$

Dvs. markedet vil på langt sigt få ligevægtsprisen $p^{LS} = F^{\frac{1}{1+\alpha}}(1+\alpha)^{\frac{1}{1+\alpha}}$.

2.8

Elasticiteten af ligevægtsprisen på lang sigt ift. A er

$$\frac{\partial p^{LS}}{\partial A} \frac{A}{p^{LS}} = 0 \cdot \frac{A}{p^{LS}} = 0$$

Her ses det, at p^{LS} er 0, hvorimod i **2.5** hvor elasticiteten af ligevægtsprisen på kort sigt ift. A afhang af ϵ og α . Dvs. på kort sigt afhænger ligevægtsprisen af A , men ikke på lang sigt.

2.9

