

LinAlg kokebog

Magnus Goltermann, xzb187

May 2022

Bestem a

Ingen løsninger

Bestem a , så en række bliver inkonsistent. Dvs. ingen x -værdier, men giver et tal.

fx:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2-a & 3 \end{array} \right]_{a=2} \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right]$$

Har ingen løsninger, da række 3 giver $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = 0 = 3$, hvilket ikke giver mening.

Kun en løsning

Bestem a , så alle rækker har pivot 1-taller. Dvs. rank=antal søjler.

fx:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2-a & 3 \end{array} \right]_{a=1} \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right]$$

Her vil den unikke løsningen være givet som:

$$x_1 = 1, x_2 = 2, \text{ og } x_3 = 3$$

Uendelige løsninger

Bestem a , så antal af pivot 1-taller er mindre end antal søjler. Dvs. rank<antal søjler.

fx:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 3-a & 3-a \end{array} \right]_{a=3} \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Her vil den frie variable være x_3 , da søjle 3 ikke har et pivot 1-tal.
Ligningerne til matricen kan skrives som:

$$x_1 + 2x_3 = 1 \iff x_1 = 1 - 2x_3$$

$$x_2 + 5x_3 = 2 \iff x_2 = 2 - 5x_3$$

Herefter sættes den (eller de) frie variable til et bogstav: $x_3 = t$.
Ligningen opskrives herefter på vektor-form:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -2 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Her ses det, at første vektor er konstanter og anden vektor er antal t 'er (x_3 'er) som hver x -værdi er lig.

Invers til en matrice

For at bestemme den inverse til en matrice, opstilles ligningen $\langle \mathbf{A} | \mathbf{I} \rangle$ og løses indtil $\langle \mathbf{I} | \mathbf{A}^{-1} \rangle$.

Fx:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Opstiller ligningen $\langle \mathbf{A} | \mathbf{I} \rangle$:

$$\mathbf{A} | \mathbf{I} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Foretager rækkeoperationer for at få venstre side til identitesmatricen:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] - 5r_3 + r_2 \rightarrow r_2 \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$-2r_3 + r_1 \rightarrow r_1 \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Her vil den inverse til $\mathbf{A}$, altså $\mathbf{A}^{-1}$ være

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ved brug af elementær matricer

Benyt samme rækkeoperationer, som ved ovenstående eksempel, men lav dem "om" til elementær matricer, og gang dem sammen til sidst.

Fx:

Først bestemmes elementær matricerne:

$$ero_1 = -5r_3 + r_2 \rightarrow r_2: \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - 5r_3 + r_2 \rightarrow r_2 \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$ero_2 = -2r_3 + r_1 \rightarrow r_1: \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - 2r_3 + r_1 \rightarrow r_1 \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Den inverse kan herefter bestemmes ved at gange elementær matricerne sammen:

$$A^{-1} = E_2 \cdot E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Bemærk: rækkefølgen af elementær matricerne er ikke ligegyldig: Første til højre, og tilføj til venstre.

Egenskaber ved den inverse

Den inverse til en matrice $\mathbf{A}^{-1}$ ganget på $\mathbf{A}$ giver $\mathbf{I}$ (identitsmatricen: kun 1-taller på diagonalen).

Fx:

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

lineære transformationer

En lineær transformation er blot en funktion der tager en vektor $\mathbf{x}$ som input og ganger en matrix $\mathbf{A}$ på:

$$T(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

Den bliver oftest givet på vektorform med x 'er, men kan laves om til en matrice.
 Fx :

$$S \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 \end{pmatrix}$$

kan skrives som matricen

$$\mathbf{A}_S = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

Sammensatte lineære transformation ($S \circ T$)

Er det samme som at gange den til højre først, og så den venstre:

$$(S \circ T)(\mathbf{x}) = \mathbf{A}_S \cdot \mathbf{A}_T \cdot \mathbf{x}$$

Basis for ker

$\ker(t) = \text{null}(\mathbf{A})$, hvor $\mathbf{A}$ er matricen defineret ved transformationen T
 Step for step med eksempel:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1

Få matricen på reduceret rækkeechelon form:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2

Bestem de(n) frie variable. Her er x_3 og x_2 frie variable, og sætter dem lig et bogstav: $x_3 = t$ og $x_2 = s$.

Hvilket giver ligningen

$$x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \iff x_1 = -x_2 + 2x_3$$

Opstil løsningerne til systemet på vektorform:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

3

Vektorerne der hører til de frie variable ovenfor, bruges nu til at opskrive basis:

$$\text{En basis for } \ker(T) \text{ er: } \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Bemærk

Hvis der er en fri variable, men som ingen af de ikke-frie variable afhænger af, kan den tilføjes til dens basis.

Fx hvis dens reducerede rækkeechelon er $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, ses det, at x_2 er en fri variable, da x_1 kun afhænger af x_3 . Så ligemeget hvad x_2 er, vil det ikke påvirke løsningen, men kan (og skal måske?) tilføjes til basis.

Ligningsystemet kan igen opskrives på vektorform, hvor $x_2 = s$ og $x_3 = t$:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{En basis for } \ker(T) \text{ er: } \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Basis for ran

$\text{ran}(T) = \text{col}(A)$, hvor A er matricen defineret ved transformationen T

Step for step med eksempel:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1

Få matricen på reduceret rækkeechelon form:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2

Bestem de søjler, som er pivot 1-taller:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

3

Tag de søjle-numre fundet i step 2, og tag fra den originale matrice. Her fandt vi søjle 1, som var det eneste med et pivot 1-tal:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$\text{En basis for } \text{ran}(T) \text{ er: } \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$